

БУЦІМ-ГАМІЛЬТОНІВСЬКИЙ ОПИС КЛАСИЧНОГО СПІНУ

Роман МАЦЮК

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
вул. Наукова 3-Б, Львів 79601

Редакція отримала статтю 7^{го} вересня 2000^{го} року.

Пропонуємо до уваги читача деяке сімейство функцій Лягранжа, кожна з яких у стані породити релятивістське рівняння руху третього ряду за похідними, що описує динаміку вільної класичної частки, наділеної моментом обертання. На цій основі запроваджено узагальнено-гамільтонівський опис релятивістської дзиги, узгоджений з додатковою умовою Piganı.

ВСТУП

Успішна геометризація загальної теорії гравітації переконливо свідчить про те, що ріманівська геометрія є для фізики світу чимось більшим, аніж просто вигідним інструментом для застосування методів глобального нутрішнього аналізу до динаміки фундаментальних фізичних систем. Останньо визнаними зістали теж і другі геометрії, які служать для опису слабих, електромагнетних та сильних взаємодій. Але для цих наступних геометрій, що є основою для теорій калібрувальних (відмітних) полів, важливим пунктом є апіорне феноменологічне встановлення групи внутрішньої симетрії, що лягає в основу апарату коваріантного упохіднення, паралельного перенесення, і, взагалі, усього апарату, який обслуговує геометрію відповідних волокнистих в'язок. Тільки ріманівська геометрія не вимагає впровадження додаткових груп симетрій в основу теорії, бо вона пов'язана самодостатнім чином лише з топологією конфігураційного простору динамічної системи, і ні з чим більше. Але сама чиста псевдоріманівська геометрія простору-часу не може описати інших взаємодій, як тільки гравітаційні. Ця геометрія природнім чином призначена для встановлення правила геодезійного руху безструктурних пробних часток, які не відчувають інших полів. Цей геодезійний рух описується диференційним рівнянням другого ряду (за похідними). Коли присутні інші поля, ми звикли вдаватись до геометрій з додатковими локальними групами (волокнисті в'язки) і описувати рух пробних часток геодезійними лініями в просторах з більшою кількістю змінних. Рівняння відповідних геодезійних ліній теж є не вище

другого ряду за похідними, як, скажімо, в геометріях на кшталт теорії Калюци-Кляйна. Ці геодезійні лінії розширених геометрій проєктуються в світові лінії частки у чотиривимірному просторі-часі, які вже відхиляються від звичайних геодезійних. Чи пам'ятає геометрія нашого світу про причину відхилення? Можна спробувати пояснити таке відхилення від геодезійності іншими причинами, обійшовшись без упровадження додаткових вимірів до фізичного світу. Наприклад, використовуючи апарат такої чотиривимірної геометрії, де геодезійні лінії визначаються диференціальним рівнянням вищого ряду за похідними.

Ми задалися питанням: а які взагалі відхилення від геодезійного руху допускає чотиривимірна динаміка в релятивістському просторі-часі. Відомо, що врахування ефектів різної природи, як-от: випромінювання, нелокальність взаємодії, внутрішня будова пробної частки або наділення її додатковими характеристиками на кшталт спіну, – провадить до підвищення порядку похідних у диференційному рівнянні, яке описує розвиток відповідної моделі. Ми обмежимо своє завдання розглядом тільки рівнянь третього ряду за похідними, які б мали ту непересічну властивість, що походили б від якогось варіаційного завдання (тобто йдеться тільки про варіаційне диференціальне рівняння, яке в теорії варіаційного числення для звичайного інтеграла дії називають рівнянням Ойлера-Пуассона).

Історія використання лягранжіанів з вищими похідними для опису класичної (не квантової) динаміки фізичних часток сягає 40^х років і пов'язана з такими іменами: F. Bopp (1946), H. Hönl (1948), З. Храпливий, J. Weyssenhoff та A. Raabe. Останні два починали свою працю над вказаною тематикою ще у Львові в часі першої советської окупації. Сьогодні лягранжіани з вищими похідними можна зустріти в теоріях бозонно-ферміонних перемін під зовнішнім полем (Поляков, Плющай, Нестеренко, Iso et al.), при описі класичної крутької частки (Riewe), при узагальненні виразу для просторово-часового інтервалу в релятивізмі (Caianiello), і при спробах будувати функцію дії з диференціальних інваріантів лінії (Якупов, Лейко, Плющай, Нестеренко, Scarpetta, Arodz). Аналітичні основи варіаційного числення, разом з упровадженням імпульсів вищого ряду, закладені Михайлом Остроградським. Несподіваний ріст зацікавлення серед математичного середовища формально-геометричними аспектами варіаційного числення вищого ряду за похідними пов'язаний з виникненням і, почавши від 60^х років, швидким розвитком нових підходів до формального диференційного числення, поширенням методів зовнішнього диференційного числення в просторах картанівських диференціальних форм, а також із узагальненням теорії диференційно-геометричних лучностей на простори з вищими похідними (т. зв. простори струменів, або джетів). Ці останні, додатково наділені функціоналом дії, отримали назву просторів A. Kawaguchi, який почав вивчати їх геометричні властивості ще в 30^х роках. Теорія лучностей вищого ряду розвивалася Ehresman^{om}, теорія об'єктів вищого ряду — Лаптевим. На сьогодні відповідна література розрослася. Тільки для прикладу вкажемо на два джерела [1, 2].

Так само, як плоский простір із простими лініями в ролі геодезійних є взірцем для простору Рімана, де геодезійні лінії описуються складнішим рівнянням (але все ще другого ряду за похідними), – так

само простір Мінковського спеціальної теорії відносності, але вже з лініями, що є розв'язками деякого рівняння з *вищими* похідними, – може служити локальним взірцем для значно складнішої геометрії деякого викривленого многовиду, наділеного структурою таких шляхів, що є екстремалами певного функціоналу з вищими похідними. Такий простір (простір Kawaguchi) відображатиме поведінку частки, яка зазнає додаткових впливів – байдуже, чи з причини складнішої внутрішньої будови, під дією зовнішніх полів, чи завдяки приписуванню їй додаткових внутрішніх ступенів вільності спірного типу.

Обмеживши себе вимогою Пуанкаре-інваріантності та варіаційності пошукуваних рівнянь руху не вище третього ряду за похідними, ми одержимо конкретний вираз, що задасть деяку сім'ю лягранжіанів. На цій основі збудуємо узагальнене перетворення Лежандра і, відповідно до цього, узагальнено-гамільтонів опис вільної частки, додатково наділеної вектором клясичного (не квантового) спіну (т. зв. *крутької* частки, *крутька*, або ж *дзиги*).

Наш опис узгоджується з т. зв. додатковою умовою Pirani і може вважатися за альтернативний до опису [3], котрий, на відміну від нашого, узгоджується з додатковою умовою Tulczyjew^a-Dixon^a.

1. ЛЯГРАНЖІВ ОПИС

Відомо[4], що у чотиривимірному просторі марно дошукуватися варіаційного рівняння третього ряду за похідними, яке мало б відповідну (псевдо)евклідову симетрію. Зауважимо, що симетрію диференційного рівняння ми розуміємо в найширшому, але все ще змістовному аспекті: вимагаємо, щоб під дією відповідних перетворень конфігураційного простору системи розв'язки рівняння не сміли переходити у щось інше, як тільки знову ж у розв'язки (можливо, другі) того ж рівняння. Відомо також[4], що можна все-ж віднайти деякі варіаційні рівняння третього ряду з вказаною симетрією, якщо дозволити додаткову залежність змінних від деякого постійного чотири-векторного параметра

$$\mathbf{s} = (s^0, \mathbf{s}),$$

який перетворюється за виказом дії (псевдо)евклідовської групи, але не підлягає варіації в процедурі виведення рівняння Ойлера-Пуасона. Загальний вигляд варіаційного рівняння третього ряду, яке б описувало (непараметризовану) світову лінію пробної частки, є таким:

$$\mathbf{v}'' \times \mathbf{a} + (\mathbf{v}' \cdot \partial_v) \mathbf{v}' \times \mathbf{a} + \mathbf{B} \mathbf{v}' + \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

де векторні функції \mathbf{a} , \mathbf{c} та матрична функція \mathbf{B} залежать від часу t , просторової координати $\mathbf{x} = (x^a)$, швидкості $\mathbf{v} = \mathbf{x}' = (v^a)$, компонент чотири-векторного параметра $\mathbf{s} = (s^\mu) = (s^0, \mathbf{s}^a)$, і підлягають додатковій системі диференціальних рівнянь в часткових похідних, яка забезпечує варіаційну природу рівняння (1) [4]. Умови Пуанкаре-інваріантності рівняння (1) теж виражаються певною системою рівнянь з частковими похідними, яким підлягають функції \mathbf{a} , \mathbf{c} та \mathbf{B} [4, 5]. В роботі [5] було показано, що сукупність перелічених

умов вимагає колінеарності вектора \mathbf{a} і вектора зміщеної швидкості $\mathbf{z} = (\mathbf{s} - s^0 \mathbf{v})$:

$$\mathbf{a} = f(\mathbf{v}) \mathbf{z}.$$

Там же запропоновано наступні вирази для функцій \mathbf{a} , \mathbf{c} та \mathbf{B} , які задовольняють усі необхідні вимоги варіаційності та Пуанкаре-незмінності рівняння (1) (метрику у просторі Мінковського умовляємось вибрати так, щоб просторова частина діагонального тензора $\eta_{\mu\nu}$ дорівнювала одиничній матриці з від'ємним знаком, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$):

$$f = [(1 + \mathbf{v}^2)(s_0^2 + \mathbf{s}^2) - (s_0 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{v})^2]^{-3/2} \quad (2)$$

$$B_{ab} = M_0 \frac{(1 + \mathbf{v}^2)\eta_{ab} - v_a v_b}{(1 + \mathbf{v}^2)^{3/2} (s_0^2 + \mathbf{s}^2)^{3/2}} \quad (3)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (4)$$

Задля того, щоб записати вирази для сім'ї лягранжіанів, впровадимо такі позначення. Орти бази чотиривимірного простору-часу позначимо $\mathbf{e}_{(\mu)}$, так що $\mathbf{e}_{(0)} \cdot \mathbf{e}_{(0)} = \eta_{00} = 1$, $\mathbf{e}_{(a)} \cdot \mathbf{e}_{(a)} = \eta_{aa} = -1$. Запровадимо допоміжні вектори:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{(a)} &= \mathbf{s} - s_a \mathbf{e}_{(a)} \\ \mathbf{z}_{(a)} &= \mathbf{z} - z_a \mathbf{e}_{(a)}, \end{aligned}$$

В цих позначеннях шукана сім'я лягранжіанів запишеться ось як:

$$\begin{aligned} L_a &= \frac{M_0}{(s_0^2 + \mathbf{s}^2)^{3/2}} \sqrt{1 + \mathbf{v}^2} \\ &- \frac{s_0}{s_0^2 + \mathbf{s}^2} \frac{(s_0^2 + \mathbf{s}_{(a)}^2) z_a - (\mathbf{s}_{(a)} \cdot \mathbf{z}_{(a)}) s_a}{(s_0^2 + \mathbf{s}_{(a)}^2) \mathbf{z}_{(a)}^2 - (\mathbf{s}_{(a)} \cdot \mathbf{z}_{(a)})^2} \frac{[\mathbf{v}', \mathbf{z}, \mathbf{e}_{(a)}]}{\mathbf{z}^2 + (\mathbf{s} \times \mathbf{v})^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Кожна з функцій Лягранжа L_a , взята окремо, продукуватиме рівняння (1) з коефіцієнтами (2,3,4).

Послужившись простим рецептом [4] переходу до однорідно-чотиривимірного запису рівняння (1), добудемо наступну еквівалентну форму варіаційного рівняння третього ряду для опису непараметризованих світових ліній крутьких часток:

$$\begin{aligned} &\frac{M_0}{\|\mathbf{s}\|^3} \left[\frac{\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3} \mathbf{u} - \frac{\dot{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{u}\|} \right] \\ &- \frac{* \ddot{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{s}}{\|\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}\|^3} + 3 \frac{* \dot{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{s}}{\|\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}\|^5} (\dot{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{s}) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Просторова частина чотири-вектора (неунітарної, взагалі кажучи) швидкості \mathbf{u} збігається з тривимірним вектором \mathbf{v} при спеціальному виборі параметризації світової лінії, коли $u^0 = 1$.

2. ГАМІЛЬТОНІВ ОПИС

Рецепт узагальненого методу Гамільтона-Остроградського запропонований у [2]. Поруч із лягранжевою системою (1) пропонується поставити під розгляд узагальнену гамільтонову систему, яка описується ядром замкнутої зовнішньої диференційної форми

$$-d(\mathbf{p}_a \mathbf{v}^a - L_0) \wedge dt + d\mathbf{p}_a \wedge d\mathbf{x}^a + d\mathbf{p}'_a \wedge d\mathbf{v}^a, \quad (7)$$

де L_0 є неоднорідною решткою від повної функції Лягранжа у випадку, коли рівняння Ойлера-Пуасона для повної функції Лягранжа L не містить похідних четвертого порядку:

$$L_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}') - \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}'}.$$

Узагальнене перетворення Лежандра задається наступним правилом:

$$\mathbf{p}' = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}'}, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{d\mathbf{p}'}{dt}.$$

Щоб записати вираз для узагальненого перетворення Лежандра, запровадимо стовпець $\zeta = (\zeta_a)$:

$$\zeta_a = \frac{1}{s_0} \frac{(s_0 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) s_a - (s_0^2 + \mathbf{s}^2) v_a}{\mathbf{z}^2 - \mathbf{z}_a^2 + (\mathbf{s} \times \mathbf{v})^2}.$$

Кожен з лягранжіанів (5) продукує одне і те саме перетворення Лежандра і, відповідно до цього, однакову функцію Гамільтона $H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}' - L$:

$$\mathbf{p} = \frac{M_0}{(s_0^2 + \mathbf{s}^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 + \mathbf{v}^2}} + \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{z}}{[\mathbf{z}^2 + (\mathbf{s} \times \mathbf{v})^2]^{3/2}} \quad (8)$$

$$\mathbf{p}' = \frac{\zeta \times \mathbf{z}}{3(s_0^2 + \mathbf{s}^2)\sqrt{\mathbf{z}^2 + (\mathbf{s} \times \mathbf{v})^2}} \quad (9)$$

$$H = -\frac{M_0}{(s_0^2 + \mathbf{s}^2)^{3/2}\sqrt{1 + \mathbf{v}^2}} - \frac{[\mathbf{v}', \mathbf{v}, \mathbf{s}]}{[\mathbf{z}^2 + (\mathbf{s} \times \mathbf{v})^2]^{3/2}}. \quad (10)$$

3. УЗАГАЛЬНЕННЯ УМОВИ PIRANI ТА СПІНОРНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЛАСНОЇ МАСИ

Узагальнена система Гамільтона-Остроградського (7), яка відповідає узагальненому перетворенню Лежандра (8,9) з функцією Гамільтона (10), має в собі (за термінологією [2]) первинну бросткову в'язь (primary semispray constraint):

$$\frac{M_0}{s_0^2 + \mathbf{s}^2} \left[\frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}'}{\sqrt{1 + \mathbf{v}^2}} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') (s_0 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{v})}{(1 + \mathbf{v}^2)^{3/2}} \right] = 0. \quad (11)$$

Можна рівнозначно висловитись, що рівняння (1), або, еквівалентно, рівняння (6) має першого інтеграла:

$$\frac{s_0 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 + \mathbf{v}^2}} = K. \quad (12)$$

При значенні $K = 0$ рівність (12) є нічим іншим, як в'язь [4]

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (13)$$

котра накладається відомою умовою Pirià

$$u_\mu S^{\mu\nu} = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

де тензор $S^{\mu\nu}$ та коваріантний чотири-вектор $\mathbf{s} = (s_0, s_\mu)$ пов'язані співвідношенням

$$s_\nu = \frac{1}{2\|\mathbf{u}\|} \epsilon_{\kappa\mu\rho\nu} u^\kappa S^{\mu\rho}.$$

Тому рівність (11) назвемо узагальненою умовою Pirià.

В роботах [4, 5] нами показано, що рівняння (6) робиться еквівалентним до рівнянь Mathisson^a-Papapetrou [6] з додатковою умовою Pirià у двох випадках: 1) або ми обмежуємо вибір інтеграла руху (12) значенням $K = 0$, або 2) переходимо до нового значення власної маси частки, яке теж є постійним уздовж траєкторії руху в силу самого рівняння (6):

$$m_0 = M_0 \left[1 - \frac{(s_0 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{v})^2}{(s_0^2 + \mathbf{s}^2)(1 + \mathbf{v}^2)} \right]^{3/2}. \quad (14)$$

ОБГОВОРЕННЯ

1. Найперше ми були зацікавлені у побудові диференційної форми (7), і для цього необхідно було здогадатись, як повинні виглядати формули (8) і (9). Функція L_0 від другої похідної не залежить, тому вона не вважається центральним місцем наших рахунків, як і вираз (10), що його найцікавішою частиною є другий доданок, тобто згортка $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$. Форму (7) можна виражати в різноманітних координатах. У виразі (7) навіть не всі диференціали є незалежними. Ми не ставили поки що завдання про обернення формул (8) і (9). Відповідно до термінології [2], йде мова про т. зв. *узагальнене* перетворення Лежандра і про подання форми (7) у т. зв. *узагальнених лежандрівських* координатах. Але ми назвали запропонований опис вертлявої частки *буцім-гамільтонівським* з іще поважнішої причини: не всі інтегральні многовиди ядра замкненої форми (7) є автоматично голономними (як це є у класичному гамільтонівському описі). Тому „узагальнено-гамільтонівська“ динаміка, що описується ядром форми (7), відрізнятиметься від лягранжівської там, де не діє первинна бросткова в'язь (11). Окрім цього, не обговорювалися ні векторна природа, ні геометрична структура фазового простору, утвореного узагальненими імпульсами.

2. Для опису руху часток з внутрішнім обертовим моментом прийнято застосовувати диференційні рівняння Papapetrou [7, 8], які, річ ясна, не містять похідних від прискорення. До цих рівнянь часом долучають додаткову умову Pirani. Нам невідомо, щоб умова Pirani, вкупі з рівняннями Papapetrou, *прямо* впливала з якогось варіаційного принципу — без апіорних в'язей, або без додаткових постеріорних обмежень фізичного чи математичного характеру. З іншого боку, перше диференційне продовження [5] динамічної системи, утвореної рівняннями Papapetrou вкупі з умовою Pirani, дозволяє запропонувати таке варіаційне узагальнення, при якому „узагальнена умова Pirani“ (11) є *наслідком* варіаційних рівнянь (6).

Уперше рівняння третього ряду за похідними використовувалось у явному вигляді для опису крутьких часток у праці Mathisson^a [6], однак питання про запис функції Лягранжа для нього у вказаній праці не обговорювалось. Принцип варіаційності для рівнянь третього ряду напштовхує ось на яке вирішення:

1. Пропонується узагальнити додаткову умову Pirani таким чином, щоб вона впливала з варіаційного завдання для функції дії з таким лягранжіаном, який містить похідні другого порядку від координат частки.
2. Поруч із частками, для яких виконується „умова ортогональності“ (13), розглядаються також і частки, світові лінії яких нахилені під певним (постійним) кутом до напрямку чотири-вектора спіну,

$$\frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \text{const}.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Kawaguchi A. On geometrization of calculus of variations. Proc. C. Carathéodory Int. Symposium (Athens, 1973). The Greek Mathematical Society, Athens, 1974. P. 271–281.
- [2] Krupková O. The geometry of ordinary variational equations. Springer, 1997.
- [3] Hanson A. J., Regge T. Ann. Phys. 1974. Vol. **87**. P. 498–566.
- [4] Мацюк Р. Докл. АН СССР. 1985. Т. **282**. С. 841–844.
- [5] Мацюк Р. Пуанкаре-инвариантные уравнения движения в лагранжевой механике с высшими производными: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. Львів, 1984.
- [6] Mathisson M. Acta Phys. Pol. 1937. Vol. **6**. P. 163–200.
- [7] Wospakrik H. J. Phys. Rev. D. 1982. Vol. **26**. P. 523–526.
- [8] Papapetrou A. Proc. R. Society. London. **A209**. P. 248–258.

QUASI-HAMILTONIAN DESCRIPTION OF CLASSICAL SPIN

Roman MATSYUK

Pidstryhach Institute for Applied Problems
in Mechanics and Mathematics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
3^b Naukova St., Lviv, 79601, Ukraine

A family of Lagrange functions is considered, each producing the classical relativistic free spinning particle equation of motion of the third order. On this grounds a generalized Hamilton-Ostrohrads'kyj description of the free relativistic spherical top is proposed, which comply with the Pirani supplementary conditions.